FOLHA 04 – EXTRA

Calcule as derivadas das funções abaixo. Ou seja, determine a equação da velocidade instantânea sendo dada as funções posição.

1. $s(t) = 5t^{-2/3}$
2. $s(t) = \frac{1}{t}$
3. $s(t) = \frac{1}{t^{0,5}}$
4. $s(t) = \sqrt[3]{5t}$
5. $s(t) = \sqrt[7]{t^3}$
6. $s(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{t}}$

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DO TOMBO - EXERCÍCIO

Como exercício, demonstre a "regra do tombo" para os seguintes casos:

1. $s(t) = t^2$
2. $s(t) = 5t^3$
3. $s(t) = t^{-1}$
4. $s(t) = t^{-2}$
5. $s(t) = 5t^4$
6. $s(t) = \sqrt{t}$

Já pensou em fazer uma demonstração mais geral? Antes de virar a página, pense nisso... Na página seguinte temos uma demonstração geral para t^n com $n \in \mathbb{Z}$, mas esta regra é geral, isto é, a "regra do tombo" vale para $n \in \Re$.

DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DO TOMBO - CASO GERAL

Veja a seguir a demonstração pra a regra do tombo para um termo de um polinômio qualquer:

$$s(t) = c \cdot t^n$$

Assim:

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{c \cdot (t+\Delta t)^n - c \cdot t^n}{\Delta t}$$

Lembremos do Binômio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Com isso:

$$(t+\Delta t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} \Delta t^k$$

Continuando o cálculo da velocidade:

$$v(t) = \frac{c \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} \Delta t^k\right) - c \cdot t^n}{\Delta t} =$$

$$= c \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} \Delta t^k\right) - t^n}{\Delta t}$$

Vamos expandir este binômio, lembrando que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ou seja:

$$(t+\Delta t)^n = \frac{n!}{0!(n-0)!} t^{n-0} \cdot \Delta t^0 +$$

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} t^{n-1} \cdot \Delta t^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} t^{n-2} \cdot \Delta t^2 + ... +$$

$$\frac{n!}{n!(n-n)!} t^{n-n} \cdot \Delta t^n \Rightarrow$$

$$(t+\Delta t)^n = t^n + n t^{n-1} \cdot \Delta t + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \cdot \Delta t^2 + ... + \Delta t^n$$

Voltando na equação da velocidade:

$$v(t) = c \frac{(t^n + n t^{n-1} \cdot \Delta t + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \cdot \Delta t^2 + ... + \Delta t^n) - t^n}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v(t) = c \frac{n t^{n-1} \cdot \Delta t + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \cdot \Delta t^2 + ... + \Delta t^n}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$v(t) = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta t} \left(n t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \cdot \Delta t^1 + ... + \Delta t^{n-1} \right)$$

Observe que Δt não é zero, embora seja muito pequeno, então podemos simplificar a fração:

$$v(t) = c \left(n t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \cdot \Delta t^1 + ... + \Delta t^{n-1} \right)$$

Agora temos o "pulo do gato": Δt não é zero, mas é muito pequeno de tal forma que ele tende a zero, então podemos escolhe-lo tão pequeno tal que ele seja desprezível sempre independente da escala que estamos trabalhando. Ou seja, na equação anterior podemos substituir $\Delta t = 0$ sem nenhum prejuízo:

$$v(t) = c \left(n t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} \cdot 0^1 + ... + 0^{n-1} \right) = c n t^{n-1}$$

GENERALIZAÇÃO DA REGRA DO TOMBO

A regra do tombo é, na verdade, um caso particular de algo mais geral chamada de Derivada. A derivação (aplicar a derivada ou "regra do tombo") de uma função é uma *operação* que se faz em uma *função*. Sempre quando derivamos uma função, esta operação é em relação à uma variável. Por exemplo, a velocidade é *sempre uma derivada da **posição** em relação ao **tempo***.

A tabela a seguir (tabela 3) mostra uma função na coluna da esquerda (que chamamos de primitiva) e a sua derivada na coluna da direita. Não demonstraremos nenhuma delas, mas as derivadas trigonométricas serão úteis quando estudar o *movimento harmônico simples*. A derivada na tabela abaixo é em relação à x, mas poderia ser em relação à qualquer outra variável.

Tabela 1: TABELA DE DERIVADAS

Primitiva	Derivada
x^n	nx^{n-1}
$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
$\ln(x) = \log_e(x)$	$1/x$

ACELERAÇÃO

Você viu que velocidade média é definida como:

$$v_{media} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

assim a velocidade instantânea possui uma definição imediata, que é a derivada da posição em função do tempo e que pode ser simbolizada das seguintes formas:

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d}{dt}s(t)$$

Dizemos "delta s por delta t no limite em que delta t tendendo a zero" ou "derivada de s de t em relação à t".

Agora vamos falar de aceleração – assunto este a ser abordado com mais detalhes futuramente. Primeiro vamos à definição de aceleração média:

$$a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Com isso, a definição de aceleração instantânea é imediata:

$$a_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d}{dt}v(t)$$

Começaremos a próxima aula com exemplos desse assunto.

Para treinar: dadas as equações a seguir, que fornecem a velocidade de um corpo em função do tempo, calcular, para cada caso, a aceleração do corpo (se necessário, use a tabela 3). Considere que as informações estejam no S.I.

1. $v(t) = 2$
2. $v(t) = 5t$
3. $v(t) = \frac{3t^2}{4}$
4. $v(t) = 2\ln t$
5. $v(t) = 5\,\text{sen}\,t$
6. $v(t) = 7\cos t$
7. $v(t) = \log t$
8. $v(t) = 3\,\text{sen}\,t + \cos t - \log t$
9. (*) $v(t) = \text{sen}(2 \cdot t)$
10. (*) $v(t) = \cos(\frac{3 \cdot t}{4})$
11. (*) $v(t) = A\,\text{sen}(\omega \cdot t)$
12. (*) $v(t) = A\,\text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$

* As últimas 4 equações aparecem no movimento harmônico simples (MHS). Temos aqui uma função composta e para derivá-las, você deve calcular a derivada da função "externa" e multiplicar pela derivada da função de "dentro".